$$= x^{mp} - 1 - (x^{nq} - 1)x^{\delta}$$
$$= x^{mp} - 1 - x^{nq+\delta} + x^{\delta} = x^{\delta} - 1 = U_{\delta}$$

c) $\Delta = U_{nq} \wedge U_{mp}$

$\Rightarrow \Delta$ divise U_{nq} et U_{mp}

$\Rightarrow \Delta$ divise $U_{mp} - U_{nq}(U_{\delta} + 1)$

d'où Δ divise U_{δ}

$* \delta = n \wedge m \Rightarrow \delta$ divise n et δ divise $m \Rightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } nq \\ \delta \text{ divise } mp \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } U_{nq} \\ U_{\delta} \text{ divise } U_{mp} \end{cases}$

d'où U_{δ} divise $U_{nq} \wedge U_{mp} = \Delta$

conclusion : $\begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } \Delta \\ \Delta \text{ divise } U_{\delta} \end{cases} \Rightarrow \Delta = U_{\delta}$

d) $\delta = n \wedge m \Rightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } n \\ \delta \text{ divise } m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } U_n \\ U_{\delta} \text{ divise } U_m \end{cases}$

donc U_{δ} divise $(U_n \wedge U_m)$

Soit $\gamma = pgcd(U_n, U_m) \Rightarrow \begin{cases} \gamma \text{ divise } U_n \\ \gamma \text{ divise } U_m \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n \text{ divise } nq \\ n \text{ divise } mp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n \text{ divise } U_{nq} \\ U_n \text{ divise } U_{mp} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \gamma \text{ divise } U_{nq} \\ \gamma \text{ divise } U_{mp} \end{cases} \Rightarrow \gamma$ divise $U_{nq} \wedge U_{mp}$

et par suite γ divise U_{δ}

conclusion : $U_n \wedge U_m = U_{\delta}$